

ANALYSE DE PONTS HISTORIQUES UTILISANT LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS DISCRETS MIXTE

G. ROUXINOL

Département de Génie Civil, Institut Polytechnique de Viseu, Portugal
ROUXINOL@DCIVIL.ESTV.IPV.PT

P. PROVIDÊNCIA

Département de Génie Civil, Université de Coimbra, Portugal
provid@dec.uc.pt

V. LEMOS

LNEC – Laboratoire National de Génie Civil, Lisbonne, Portugal
vlemos@lnec.pt

RÉSUMÉ

La méthode des éléments discrets (MED) initialement appliqué au calcul des massifs rocheux, fut rapidement adapté et généralisé à d'autres calcul, tel que des ponts historiques. Cette méthode est particulièrement appropriée à la représentation de structures au caractère prédominant discret. Les formulations existantes considèrent les blocs, rigide ou déformable, ou les particules rigides. Dans le sens d'agrandir son champ d'application, un modèle plan d'éléments discrets rigides mixte a été développé permettant d'assembler les blocs avec les particules. De cette façon, il devient possible de réaliser des études de ponts en maçonnerie, simulant les arches et les murs avec les blocs et le remplissage avec les particules. Ce modèle suit les principes basiques de la MED et introduit quelques nouveaux concepts, à savoir, la définition de nouveaux contacts et la génération du maillage de particules. Le modèle 2D développé permet aussi la détermination des valeurs et des vecteurs propres de la totalité de la structure, très utile pour calibrer les modèles numériques. L'application de la MED mixte à l'analyse quasi-statique des structures est particulièrement indiquée pour calculer la capacité de charge et respective mode de collapse des ponts en arches, et un exemple d'application de ce type est présentée.

1 INTRODUCTION

Cette communication présente la méthode des éléments discrets mixtes (MEDM) numérique pour le cas plan. Cette formulation est appelée "mixte" parce qu'elle inclut des éléments discrets polygonaux et des éléments discrets circulaires. Elle a été développée dans les trois années dernières par le premier des auteurs, pendant la préparation de sa thèse de Doctorat [1]. L'algorithme a été traduit dans un programme informatique écrit avec le logiciel Compaq Visual FORTRAN [2], dû à la tradition d'usage de ce langage informatique par la communauté de recherche d'ingénieur structurelle. La méthode suit génériquement la méthode des éléments discrets (MED) pour les blocs [3] et pour les particules [4] et sa principale application est le calcul de la capacité de charge des ponts en arche en maçonnerie.

Le modèle plan développé comprend des éléments discrets (ED) rigides de géométrie polygonale, de trois à cinq sommet, reportés dans le texte par "blocs", ou circulaire, reportés par "particules". Chaque élément peut avoir jusqu'à trois degrés de liberté, deux composantes de translation et une de rotation. Chaque bloc est géométriquement défini

par les coordonnées cartésiennes de ses sommets et chaque particule est définie par son rayon et par ses coordonnées du centre de masse. Toutes les propriétés géométriques sont calculées depuis ces données.

L'interaction mécanique entre les éléments discrets est représentée par des contacts ponctuels déformables associés à une loi constitutive. Donc, dans ce qui peut être pensé comme partie d'un processus de discrétisation, la surface de chaque bloc est remplacée par un nombre fini de points convenablement localisés qui sont les points des potentiels contacts. Un contact est établi chaque fois qu'un de ces potentiels points de contacts croise l'enveloppe externe d'un élément discret proche. Les forces d'interaction développées dans ce point de contact sont fonction de la résultante de l'interpénétration des deux éléments en contact. Le modèle constitutif pour l'interface du contact peut être formulé en contrainte ou en forces résultantes. La formulation en contrainte est la plus appropriée quand l'évolution des contraintes est nécessaire, comme dans les cas de grandes discontinuités dans les massifs rocheux ou alors quand l'histoire des déplacements est nécessaire. Par contre, la formulation en forces résultantes est plus simple et peut être sélectionné pour la détermination de la charge de collapsus des structures parce que la déformabilité local n'est pas critique pour la détermination des mécanismes de collapsus. Notez que pour la MED avec des éléments discrets rigides la déformabilité des contacts personnifient la déformabilité du système structurel entier et, par suite, elle doit être déterminée en laboratoire pour garantir un comportement global adéquat.

En général, la MED consiste à appliquée alternativement une loi de mouvement au niveau du centre de masse des éléments, et une loi constitutive au niveau des points de contact. Dans chaque itération la loi de mouvement donne les déplacements généralisés des éléments discrets et la loi constitutive, définis par une relation force-déplacement donne les forces du contact associées à ces déplacements généralisés.

Les sections de 2 à 6 décrivent la MEDM, y compris la loi du mouvement, la loi constitutive de contact, la définition des contacts, la détection et actualisation des contacts, calcul du pas de temps critique et la génération automatique du maillage. La section 7 illustre une application de la méthode avec un exemple.

2 MOUVEMENT DES ÉLÉMENTS DISCRETS

Dans le système de référence des coordonnées global, le mouvement du centre de masse de chaque élément discret exige la considération de deux composantes de translation et une de rotation (u_1, u_2, θ) . Les trois équations de mouvement sont données par

$$\begin{cases} F_i = m \ddot{u}_i, & i = 1, 2 \\ M = I \ddot{\theta} \end{cases} \quad (2.1)$$

ou u_i et ω sont les composantes du déplacement et de la vitesse angulaire du centre de masse, m et I sont les propriétés inertielles de l'élément discret et chaque point sur la lettre dénote une dérivé à respect du temps t . Les composantes de la force résultante F_i , et le moment M , référé au centre de masse sont donné par

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^D + F_i^G + F_i^C + F_i^Q = F_i^D + \bar{F}_i \\ M &= M^D + M^C + M^Q = M^D + \bar{M} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ou F_i^D et M^D sont les forces d'amortissement généralisé, F_i^C et M^C sont les forces de contact résultante, F_i^G fait référence aux forces de masse et F_i^Q et M^Q sont les forces appliquées extérieurement résultante.

Pour une analyse quasi-statique, la MED exige l'inclusion d'un amortissement numérique dans l'équation de mouvement pour dissiper l'énergie cinétique ce qui permet de considérer ceci comme une méthode de la relaxation dynamique. Trois types d'amortissement sont considérés: constante visqueux global [5], constante visqueux global d'ajustement [6] et non-visqueux local [7]. Pour la définition de la maille des particules les propriétés inertielles sont aussi modifié pour optimiser le nombre d'itérations que la méthode exige pour la convergence. Pour ce dernier cas, dû à l'immatérielle signification du temps pour une analyse quasi-statique, le pas de temps est fixé et les valeurs pour les quantités inertielles résultent de la condition de stabilité.

Cette MED utilise la méthode des différences centrale explicite (finit) pour l'intégration dans le temps des équations de mouvement (2.1) [8]. Parce que les méthodes explicites sont seulement conditionnellement stables, le pas de temps Δt ne peut pas dépasser une valeur maximum habituellement désignée par pas de temps critique qui dépend de la fréquence plus élevé, voir la section 5.

La méthode des différences centrale donne

$$\dot{w}_i^t = \frac{1}{\Delta t} (w_i^{t+\Delta t/2} - w_i^{t-\Delta t/2}), \quad \dot{\omega}^t = \frac{1}{\Delta t} (\omega^{t+\Delta t/2} - \omega^{t-\Delta t/2}) \quad (2.3)$$

et

$$w_i^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{\Delta t} (u_i^{t+\Delta t} - u_i^t), \quad \omega^{t+\Delta t/2} = \frac{1}{\Delta t} (\theta^{t+\Delta t} - \theta^t) \quad (2.4)$$

où θ est la rotation de l'élément discret (positif dans le sens antihoraire), et l'indice supérieur indique le temps. Utilisant (2.3) les expressions (2.1) sont approximativement donné par

$$w_i^{t+\Delta t/2} = w_i^{t-\Delta t/2} + \frac{F_i^t}{m} \Delta t, \quad \omega^{t+\Delta t/2} = \omega^{t-\Delta t/2} + \frac{M^t}{I} \Delta t \quad (2.5)$$

lesquels donnent les vitesses de translation et de rotation dans le demi pas de temps ce qui correspond au temps $t + \Delta t/2$. Les incréments de déplacement généralisé de translation et de rotation pendant un pas de temps sont donnés par

$$\Delta u_i^{t+\Delta t} = w_i^{t+\Delta t/2} \Delta t, \quad \Delta \theta^{t+\Delta t} = \omega^{t+\Delta t/2} \Delta t \quad (2.6)$$

et, utilisant (2.4), les déplacements généralisé total sont

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \Delta u_i^{t+\Delta t}, \quad \theta^{t+\Delta t} = \theta^t + \Delta \theta^{t+\Delta t} \quad (2.7)$$

Finalement, $x_i^{t+\Delta t}$, la nouvelle position du centre de masse de l'élément discret est donnée par

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^t + \Delta u_i^{t+\Delta t} \quad (2.8)$$

La mise à jour des coordonnées, par exemple du sommet A d'un bloc, doit comprendre le mouvement de la rotation

$$x_i^{A,t+\Delta t} = x_i^{A,t} + w_i^{A,t+\Delta t/2} \Delta t, \quad (2.9)$$

où $w_i^{A,t+\Delta t/2}$ est la vitesse du sommet A, lequel est donné par

$$w_i^{A,t+\Delta t/2} = w_i^{t+\Delta t/2} - e_{ij3} \omega^{t+\Delta t/2} (x_j^{A,t} - x_j^t), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.10)$$

où e_{ijk} est le symbole de permutation.

2.1 Amortissement visqueux global d'ajustement

Utilisant un coefficient d'amortissement proportionnel aux propriétés inertielles, les forces d'amortissement visqueuses généralisées sont donnée par

$$F_i^{D,t} = -\alpha m \dot{x}_i^t, \quad M^{D,t} = -\alpha I \omega^t \quad (2.11)$$

où α est le coefficient d'amortissement visqueux. Les équations (2.5), (2.2), (2.11) et

$$\dot{x}_i^t \cong \frac{\dot{x}_i^{t-\Delta t/2} + \dot{x}_i^{t+\Delta t/2}}{2}, \quad \omega^t \cong \frac{\omega^{t-\Delta t/2} + \omega^{t+\Delta t/2}}{2}$$

donne

$$\dot{x}_i^{t+\Delta t/2} = \frac{(1 - \alpha \Delta t / 2) \dot{x}_i^{t-\Delta t/2} + \frac{\bar{F}_i^t}{m} \Delta t}{1 + \alpha \Delta t / 2}, \quad \omega^{t+\Delta t/2} = \frac{(1 - \alpha \Delta t / 2) \omega^{t-\Delta t/2} + \frac{\bar{M}^t}{I} \Delta t}{1 + \alpha \Delta t / 2} \quad (2.12)$$

Pendant le processus d'itération les forces généralisées initialement non-équilibrées \bar{F}_i^t et \bar{M}^t , progressivement tendes vers la valeur zéro avec le temps t , quand t'il convergence à une solution statique.

Pour réduire le nombre d'itérations requisse pour la convergence dans le temps, le coefficient α ne doit pas rester constant en (2.12). Dans la formulation d'amortissement visqueux d'ajustement [6] ce coefficient varié de manière à que le taux entre la puissance d'amortissement et la variation d'énergie cinétique dans le temps $R^t \equiv \sum P^{D,t} / \left| \sum \dot{E}_k^t \right|$ soit constant, par exemple $R^t = 0.5$, où la sommes comprend tous les éléments discrets, et

$$P^{D,t} / \alpha^{avd} = I \cdot (\omega^t)^2 + \sum_{i=1}^2 m \cdot (\dot{x}_i^t)^2 \quad (2.13)$$

$$2\Delta t \dot{E}_k^t \cong I \cdot \left((\omega^{t+\Delta t/2})^2 - (\omega^{t-\Delta t/2})^2 \right) + \sum_{i=1}^2 m \cdot \left((\dot{x}_i^{t+\Delta t/2})^2 - (\dot{x}_i^{t-\Delta t/2})^2 \right)$$

où α^{avd} est le coefficient d'amortissement visqueux qui s'ajuste. Pour garantir une variation graduelle de α afin d'évitez des sauts brusque, au lieu d'utiliser la valeur α^{avd} qui résulte de l'imposition de la valeur constante du taux ci-dessus, la valeur employée est $\alpha^{t+\Delta t}$ qui dépend de la différence entre la valeur α^t utilisée dans le pas de temps précédent et la valeur idéale α^{avd} c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha^{t+\Delta t} = \alpha^t / \delta^i & \text{si } \alpha^{avd} < \alpha^t \delta^d \\ \alpha^{t+\Delta t} = \alpha^t & \text{si } \alpha^t \delta^d \leq \alpha^{avd} < \alpha^t / \delta^d \\ \alpha^{t+\Delta t} = \min(\alpha^t \delta^i, \alpha^0) & \text{si } \alpha^{avd} \geq \alpha^t / \delta^d \end{cases} \quad (2.14)$$

avec $\delta^i = 1.05$ et $\delta^d = 0.90$. Parce que la valeur initiale α^0 est très élevée le coefficient employé sera réduit progressivement. Mais si une oscillation du mouvement apparaît soudainement il sera incrémenté progressivement. Néanmoins, noté que α n'est jamais admit quand t'il surpasse α^0 , parce que cela pourrait occasionner une convergence extrêmement lente. Comme le système structurel abouti à un état stable (soit d'équilibre statique soit de collapsus) le coefficient souffre une réduction progressive et arrive à réduit le temps du calcul.

2.2 Amortissement non-visqueux local

Cette formulation utilise les forces d'amortissement non-visqueuses suivantes

$$F_i^{D,t} = -\text{sgn}(\dot{x}_i^{t-\Delta t/2}) \beta |F_i^t|, \quad M^{D,t} = -\text{sgn}(\omega^{t-\Delta t/2}) \beta |M^t| \quad (2.15)$$

où $\text{sgn}(f(x)) \equiv f(x)/|f(x)|$ est la fonction signe et β est un coefficient d'amortissement non-visqueux. Introduisant les définitions (2.15) dans (2.5) donne

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i^{t+\Delta t/2} &= \bar{\omega}_i^{t-\Delta t/2} + \left(1 - \beta \text{sgn}(\bar{\omega}_i^{t-\Delta t/2} \cdot \bar{F}_i^t)\right) \frac{\bar{F}_i^t}{m} \Delta t \\ \bar{\omega}^{t+\Delta t/2} &= \bar{\omega}^{t-\Delta t/2} + \left(1 - \beta \text{sgn}(\bar{\omega}^{t-\Delta t/2} \cdot \bar{M}^t)\right) \frac{\bar{M}^t}{I} \Delta t\end{aligned}\quad (2.16)$$

Pour le coefficient β [9] et [10] propose les valeurs de 0.8 et 0.7 pour les systèmes, respectivement, de blocs et de particules. Pour la méthode mixte traitée dans cette communication le premier de ces valeurs a été utilisé avec succès.

2.3 Masse calibrer

La masse calibrée, dans le cas d'une analyse quasi-statique, consiste à utiliser des valeurs fictives pour les quantités inertielles [11], ce qui permet de réduire le nombre d'itérations requise pour atteindre un équilibre, ou un collapsus, pour une erreur admissible prédéfinie. Ces valeurs fictives sont obtenues par multiplication les vrais par un facteur de calibration. Comme reporté au-dessus, dû à la condition de stabilité de l'intégration adoptée, le pas de temps utilisé doit être plus petit que la valeur critique, c'est-à-dire

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{cr}} = \frac{T_{\text{min}}}{\pi} \cong 2\varphi \cdot \min\left(\sqrt{\frac{m_{\text{min}}}{k_{\text{max}}^{\text{tr}}}}, \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{k_{\text{max}}^{\text{rot}}}}\right) \quad (2.17)$$

avec $\varphi \in]0,1]$ et où T_{min} est la période minimum du système structurel et les coefficients de rigidité de translation et de rotation sont donné par

$$k^{\text{tr}} = 2 \sum_{i=1}^C (k_{s,i} + k_{n,i}), \quad k_{\text{block}}^{\text{rot}} = 2r^2 \sum_{i=1}^C (k_{s,i} + k_{n,i}), \quad k_{\text{particule}}^{\text{rot}} = 2r^2 \sum_{i=1}^C k_{s,i}$$

où C est le nombre total de contacts de chaque élément discret et les souscrits s et n dénotent les directions tangente et normal, k_s , k_n sont donc les correspondante coefficient de rigidité élastique initiale, voir [11]. L'expression (2.17) montre que si les propriétés inertielles m et I sont augmenté le pas de temps est aussi augmenté. Par exemple, le pas de temps critique peut être augmenté jusqu'à $\Delta t_{\text{cr}}^{\text{ms}}$ si les réel propriétés inertielles sont multipliées par,

$$\frac{m_{\text{min}}^{\text{ms}}}{m_{\text{min}}}, \frac{I_{\text{min}}^{\text{ms}}}{I_{\text{min}}} = \left(\frac{\Delta t_{\text{cr}}^{\text{ms}}}{\Delta t_{\text{cr}}}\right)^2 \quad (2.18)$$

Quand, pendant le processus itérative, les contacts sont actualisé C peut être modifié ce qui fait que $\Delta t_{\text{cr}}^{\text{ms}}$ doit être aussi actualisé.

3 LOI CONSTITUTIVE FORCE-DÉPLACEMENT

Chaque contact a une paire de forces normal opposé (compression) et une paire de forces tangente opposé (ou tangentiel) qui agissent sur les deux éléments en contact. L'intensité de ces forces dépende de la loi constitutive et de l'intensité des déplacements relatifs normaux et tangentiels. Si, dans le temps t , les coordonnées du point de contact C sont $x_j^{C,t}$, la vitesse dans le temps $t + \Delta t/2$ de ce point de contact C de l'élément discret \mathbf{X} (lequel dénote un des deux éléments en contact \mathbf{A} et \mathbf{B}), est donné par,

$$\bar{\omega}_i^{\mathbf{X},t+\Delta t/2} = \bar{\omega}_i^{\mathbf{X},t+\Delta t/2} - e_{ij3} \omega^{\mathbf{X},t+\Delta t/2} (x_j^{C,t} - x_j^{\mathbf{X},t}), \quad i, j = 1, 2 \quad (3.1)$$

où, quand t'il est seul, l'indice supérieur X fait référence au centre de masse de l'élément. Dans le cas d'un contact qui implique un sommet d'un bloc (ou deux) la vélocité du point de contact qui ne coïncide pas avec le sommet, voir [12], peut approximativement être donné par (2.10). Au point de contact C la vélocité relative entre les deux éléments discrets à les composantes $v_i^C = v_i^{B,C} - v_i^{A,C}$, où, par simplification, la référence au pas de temps sera omise dans le texte qui suit. Pour un système local de coordonnées associé aux directions principal du contact, les composants tangente et normal de la vélocité relative sont

$$\begin{Bmatrix} v_s^C \\ v_n^C \end{Bmatrix} = (\bar{\mathbf{n}}^C)^T \begin{Bmatrix} v_1^C \\ v_2^C \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{n}}^C = \begin{bmatrix} n_2 & n_1 \\ -n_1 & n_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où n_i sont les composantes de la normale du contact dans le système global de coordonnées et c'est un vecteur unitaire pointer de l'ED avec l'étiquette de référence plus petite à l'ED avec l'étiquette de référence plus grande, voir [1]. Les incréments de déplacement relative du contact pendant un pas de temps, donnés par la différence entre les déplacements des éléments au niveau du point de contact, sont approximativement donnés par

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_s^C \\ \Delta u_n^C \end{Bmatrix} = \Delta t \begin{Bmatrix} \Delta v_s^C \\ \Delta v_n^C \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

et les correspondant incréments de force tangentielle et normal (compression positif) sont

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_s^C \\ \Delta F_n^C \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_s^C \\ \Delta u_n^C \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Si le pas de temps est assez petit pour ignorer l'effet de la rotation du système de coordonnées local dans la somme suivante, les forces totales du contact tangentielle et normales seraient,

$$\begin{Bmatrix} F_s^C \\ F_n^C \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} F_s^C \\ F_n^C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta F_s^C \\ \Delta F_n^C \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

où l'indice supérieur $*$ dénote que ce ne sont pas des valeurs définitives parce que le critère de résistance doit encore être considéré: (1) si $F_n^{C*} < 0$ le contact devient virtuel; (2) si la valeur de la force de compression dépasse la contrainte maximum admissible d'un des deux éléments en contact cette valeur maximum est imposée; (3) si $|F_s^{C*}| > F_{s,\max}$,

$F_s^C = \text{sgn}(F_s^{C*}) \cdot F_{s,\max}$, où, si $F_n^C > 0$, la force tangente maximum est définie par le critère de

Mohr-Coulomb $F_{s,\max} = c + F_n^C \tan \phi$, c et ϕ devient la cohésion et l'angle de frottement. Les forces généralisées, associées au centre de masse des éléments discrets, dû aux phénomènes du contact est défini par

$$\begin{cases} F_i^A = -F_i^C \\ M^A = e_{ij3} F_i^C (x_j^C - x_j^A) \end{cases}, \quad \begin{cases} F_i^B = F_i^C \\ M^B = -e_{ij3} F_i^C (x_j^C - x_j^B) \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \quad \begin{Bmatrix} F_1^C \\ F_2^C \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{n}}^C \begin{Bmatrix} F_s^C \\ F_n^C \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

4 INTERACTION MÉCANIQUE ENTRE LES ÉLÉMENTS DISCRETS

Le modèle d'interaction mécanique entre les deux éléments discrets au point de contact est décrit dans la section antérieure. Une définition simple et systématique des contacts est requise pour garantir la consistance des relations géométriques et l'efficacité de la méthode de détection des contacts. Comme exemple des conséquences de cette exigence, pour tenir une définition univoque des contacts, les sommets des blocs sont

régularisés en utilisant des arcs circulaires qui sont tangent aux côtés adjacents [13] et c'est centre des arcs sont appelé de *sommet théorique*, voir la figure 1.

4.1 Géométries des Contacts

Il y a huit types différents de contacts: (1) sommet-sommet; (2) sommet-côté; (3) côté-sommet; (4) cercle-cercle; (5) sommet-cercle; (6) côté-cercle; (7) cercle-sommet; (8) cercle-côté où les termes sommet et côté sont utilisé pour les blocs et le terme cercle pour les particules. Chaque contact est caractérisé par huit item de données: (1) l'étiquette numéroté de la référence du contact C_i ($i = 1, \dots$, nombre de contacts); (2) le type de contact Γ_i^C ; (3) les coordonnées du point de contact $\mathbf{x}_i^C \equiv x_{i,j}^C, (j=1,2)$; (4) les composants de la normale de la surface du contact $\mathbf{n}_i \equiv n_{i,j}^C$; (5) l'étiquette numéroté de la référence des deux éléments discrets en contact, $\{\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i\}$, avec $\mathbf{A}_i < \mathbf{B}_i$ (l'indice inférieur i sera normalement omis); (6) les coordonnées des centres de masse des éléments discrets en contact $\mathbf{x}_i^A, \mathbf{x}_i^B \equiv x_{i,j}^A, x_{i,j}^B$; (7) et (8) les coordonnées de chaque sommet $\mathbf{x}_i^A, \mathbf{x}_i^B \equiv x_{i,j}^A, x_{i,j}^B$ et de chaque sommet théorique $\mathbf{x}_i^A, \mathbf{x}_i^B \equiv x_{i,j}^A, x_{i,j}^B$ des éléments en contact.

Un contact *virtuel* est établi, avant qu'un réel contact se constitue, toutes les fois que la distance entre deux éléments devient plus petit qu'une distance de tolérance prédéfinie pour réduire le nombre de fois que les sous-routine de détection de contact sont accédés, parce qu'elle sont assez avides de temps de computation. Les forces de contact existent à peine pour les contacts réels, ce qui correspond à une superposition (numérique) effective ou bien à une séparation nul (physique).

Un système rectangulaire local de coordonnées $(t, n)^C$ est défini pour un contact C , dont l'origine est localisée sur le point de contact et dont l'axe normal est perpendiculaire à la surface du contact, voir la figure 1. La classification du type de contact trouvé est définie par deux conditions géométriques. Pour un contact du type 1 il y a deux sommets potentiellement en contact, A et B, et les conditions géométriques sont (a) la projection du sommet théorique B sur les côtés adjacent à A doit tomber à l'intérieur de la région circulaire et vice versa; (b) la superposition des éléments discrets d^C (négatif quand une superposition se produit) doit satisfaire deux tolérances admissibles $d_o > 0$ et $d_G < 0$, la première contrôle l'effectivité du contact et la seconde la séparation,

$$-d_o < d^C < d_G, \quad d^C = \overline{AB} - R_A - R_B \quad (4.1)$$

Pour les contacts du types 4, 5 et 7 les critères sont similaire à ces précités, mais plus simple, il n'est pas nécessaire de vérifier si le contact se produit dans une région circulaire. Pour les contacts du type 2, 3, 6 et 8 des conditions géométriques similaires s'appliquent. Par exemple, pour un contact du type 2 la projection du sommet théorique A sur le côté adjacent au sommet B doit tomber au-dehors du correspondant arc circulaire et les conditions (4.1) doivent être satisfaites, mais avec une redéfinition de la superposition $d^C = D - R_A$, où D est la distance entre le sommet théorique A et le côté adjacent au sommet B. Les contacts du type 1, 4, 5 et 7 et du types 2, 3, 6 et 8 ont les coordonnées donnés, respectivement, par

$$\begin{Bmatrix} x_1^C \\ x_2^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^A \\ x_2^A \end{Bmatrix} + \left(R_A + \frac{d^C}{2} \right) \begin{Bmatrix} n_1^C \\ n_2^C \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_1^C \\ x_2^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^X \\ x_2^X \end{Bmatrix} - (\bar{\mathbf{n}}^e)^T \begin{Bmatrix} d_{t1} \\ d^C \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{n}}^e = \begin{bmatrix} n_2^e & n_1^e \\ -n_1^e & n_2^e \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où $X \equiv A$ pour les contacts du type 3 et 6 et $X \equiv B$ pour les contacts du type 2 et 8 et $(t, n)^e$ est le référentiel local où l'origine est localisée sur le premier sommet adjacent au côté en contact trouvé quand t'on tourne dans le sens antihoraire du point de contact, avec n^e perpendiculaire à ce côté. dt_1 est la distance entre le sommet adjacent au côté en contact et la projection du sommet théorique sur le même côté.

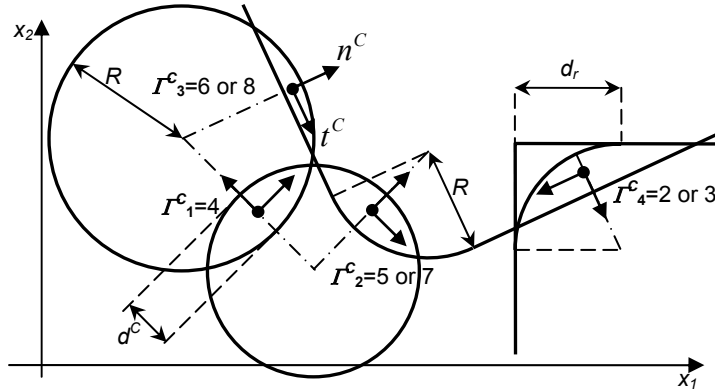


Figure 1 – Type de contact entre les éléments discrets.

4.2 Détection et actualisation des contacts

Pendant le processus itératif la MED détecte automatiquement quand un nouveau contact est créé ou quand un contact existant est supprimé. Cela demande une représentation simple des zones potentielles de contact et un algorithme numérique robuste et effectif qui détecte et actualise les contacts [11], [14], [15]. L'algorithme de détection développé est basé sur la méthode de Cundall [14] et la méthode des volumes enveloppant [16]. Premièrement, une maille rectangulaire est représentée sur le domaine structurel, voir la figure 2, qui permet de construire une matrice d'incidence avec une colonne pour chacune des cellules formées par le maillage rectangulaire et une ligne pour chaque élément discret. Ainsi tous les éléments totalement ou partialement compris dans une cellule apparaissent dans la même colonne de la matrice d'incidence. Ensuite chaque élément discret est circonscrit avec une enveloppe circulaire, voir la figure 2. Alors, de cellule en cellule la détection des potentiels contacts est faite. Dans chaque cellule, d'enveloppe en enveloppe la détection est faite et si deux enveloppes se superposent alors une étude locale géométriquement plus exacte basée sur les conditions établies dans la section antérieure est exécutée permettant d'identifier les contacts effectifs.

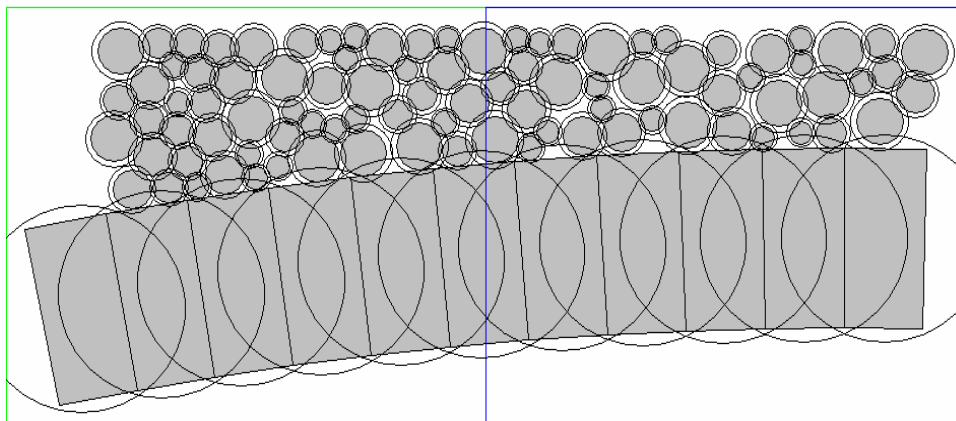


Figure 2 – Maillage rectangulaire et volumes enveloppant.

Pour éviter d'exécuter la détection des contacts dans toutes les itérations le programme établit et tient au courant une valeur approximative pour le déplacement maximum accumulé depuis la dernière exécution de détection de contact. Toutes les fois que ce déplacement dépasse ηd_r (où d_r est le paramètre d'arrondissement des sommets des blocs, voir la figure 1), avec le coefficient $\eta = 1.1$ par défaut, une nouvelle détection de contact est exécutée et la matrice d'incidence est mis à jour. Pour les systèmes avec beaucoup d'éléments discrets, par exemple les systèmes 3D ou les simulations d'écoulements, des méthodes plus avancées, par exemple celle qui utilise les arbres binaires, devraient être utilisées.

5 DÉFINITION DU PAS DE TEMPS

La sélection du pas de temps Δt est importante parce que le coût computationnel total est proportionnel au nombre total d'itérations requises pour le processus de convergence. La stabilité de l'opérateur numérique récursif et l'exactitude de l'intégration sont les deux facteurs les plus importants à considérer pour déterminer la valeur maximum de Δt .

Pour la stabilité le rayon spectral de l'opérateur récursif doit être plus petit que l'unité. Pour l'intégration directe de (2.1) et pour satisfaire la dernière condition, le procédé des différences central conditionnellement stable exige un pas de temps qui satisfait [17], $\Delta t \leq \Delta t_{cr} = T_{min}/\pi$ où T_{min} est la période minimum non amortie du système ED. Le code développé inclut aussi la capacité exécuter une analyse de valeur et vecteur propres, sous la supposition de joints élastiques, ce qui a permis la validation des formules simplifiées adoptée dans la pratique. En général l'exactitude de l'intégration sera aussi vérifiée si Δt satisfait la relation antérieure. En considérant un maillage régulier et un degré de liberté pour de mode globale avec le déplacement relatif maximum aux contacts [18] il s'établit une expression simplifiée pour T_{min} qui donne

$$\Delta t_{cr} = 2\lambda \sqrt{m_{min}/k_{max}} \quad (5.1)$$

où le paramètre $\lambda \in]0,1[$ tiens compte du numéro de contacts supérieur à un (en général, il est utilisé $\lambda \in]0.1,0.5[$), m_{min} est la masse minimum des ED et k_{max} est le coefficient de rigidité maximum des contacts. C'est aussi possible de calculer Δt_{cr} utilisant le théorème de Gerschgorin [19] pour définir une valeur maximum pour la fréquence, comme le taux maximum entre la rigidité et la correspondante propriété d'inertie pour tous les degrés de liberté du système a considéré isolé, $\Delta t_{cr} = \min(m/k^{tr}, I/k^{rot})$ avec k^{tr}, k^{rot} défini dans la section 2.

Pour calculer Δt_{cr} par le problème de valeur et vecteur propre il est nécessaire de calculer la matrice de rigidité du système structurel [1]. Parce que la rigidité du modèle présente des points de contacts effectif qui opère dans la gamme élastique, la matrice de rigidité globale est obtenue en ajoutant la contribution de tous les contacts éligibles, où la matrice de rigidité élémentaire en coordonnées local est donnée par

$$\mathbf{k}^C = \begin{bmatrix} k_s & 0 & -d_n^A k_s & -k_s & 0 & d_n^B k_s \\ 0 & k_n & d_s^A k_n & 0 & -k_n & -d_s^B k_n \\ -d_n^A k_s & d_s^A k_n & (d_s^A)^2 k_n + (d_n^A)^2 k_s & d_n^A k_s & -d_s^A k_n & -d_s^A d_s^B k_n - d_n^A d_n^B k_s \\ -k_s & 0 & d_n^A k_s & k_s & 0 & -d_n^B k_s \\ 0 & -k_n & -d_s^A k_n & 0 & k_n & d_s^B k_n \\ d_n^B k_s & -d_s^B k_n & -d_s^A d_s^B k_n - d_n^A d_n^B k_s & -d_n^B k_s & d_s^B k_n & (d_s^B)^2 k_n + (d_n^B)^2 k_s \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

et où $d_{n,s}^X$ est la distance du centre de masse de l'élément discret X au point de contact, mesuré le long des directions du système de référence local.

6 GÉNÉRATION DU MAILLAGE D'ÉLÉMENTS DISCRETS

La caractérisation de la géométrie des structures de maçonnerie existantes peut être exécutée par des méthodes différentes, soit classique, basé sur la lecture des dessins ou mesurant à travers un mètre à ruban, tachymètre et mètre à laser; soit ceux plus récents, basés sur les techniques photographiques, habituellement désignés par photogrammétrie [20] [21], et sur des essais *in situ* y compris ultrasons [22].

En accordance avec les différentes méthodes, la géométrie spatiale du maillage d'éléments discrets est obtenue soit par la génération automatique de plusieurs types d'éléments structurels basée sur quelques principaux paramètres géométriques, soit par la lecture de fichier ASCII, comme les du type DXF™ (lequel est fondamentalement un format pour la représentation de données graphique étiqueté). Les éléments structurels standards incluent des pleins-cintres, des arcs segmentaires, des arcs-boutants, des poteaux, des murs, des mures de tympan et le matériel de remplissage.

Le maillage des particules, d'après le type de remplissage, permet des distributions régulières, rectangulaires ou hexagonales, et des distributions aléatoires, avec le rayon constant ou variable. D'après la méthode d'expansion du rayon [23] la génération aléatoire de la maille des particules exige la définition de (1) une région rectangulaire qui définit le domaine principal où aucunes particules est permit à l'extérieur; (2) un ensemble de sous-domaines convexes et fermé (circulaire, rectangulaire, triangulaire, segment de cercle, etc.) lesquels définissent des zones à l'intérieur du domaine principal où aucune particule n'est acceptée. Le domaine admissible est donné par le domaine principal sans les sous-domaines. Pour garantir une porosité prédéfinie, quand elles sont aléatoirement distribués sur le domaine admissible, les particules possèdent un rayon réduit, figure 3(a), et seulement après le rayon est étendu.

Alors, par l'application de la MEDM le système est autorisé à converger à une configuration qui correspond à la porosité prédéfinie (ou à un champ de contrainte), figure 3(b). Avant la distribution des particules une couche de blocs est placée au-dessus du niveau de la chaussée (lequel correspond à une facette supérieure du domaine admissible), figure 3(a). Ces blocs sont enlevés après l'étape de l'expansion. Après la conclusion de la définition de la maille des éléments discrets, il peut encore être visualisé soit à travers l'environnement FORTRAN du Visuel Compaq, soit à travers l'AutoCAD [24] avec l'aide d'une macro VBA encastré (Microsoft Visuel Basic pour Application).

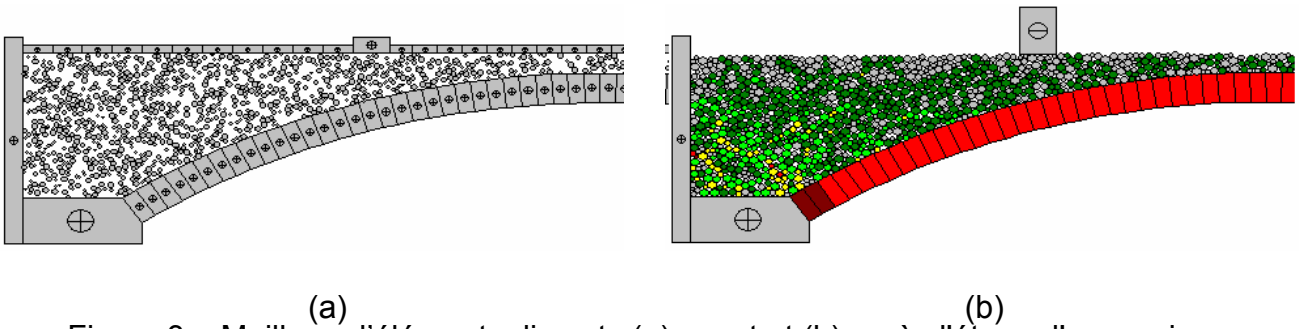


Figure 3 – Maillage d'éléments discrets (a) avant et (b) après l'étape d'expansion.

7 EXEMPLE D'APPLICATION

Cette section suit très attentivement [25] lequel contiennent des détails supplémentaires. Le collapsus du pont en maçonnerie de Bridgemill, construit en 1869 à Girvan, Écosse, est étudié pour l'illustration de l'algorithme présenté. Hendry, et Davies Royles a mesuré sa géométrie, à déterminé ses propriétés mécaniques, à exécuté un essai de charge et enregistré la valeur de la charge antérieur au collapsus [26]. Dû à l'insuffisant registre de cette nature, cet exemple a été utilisé par plusieurs chercheurs pour valider leurs modèles numériques [27]. Dans ce qui suit, quelques considérations sont faite sur les valeurs à sélectionné pour les paramètres requit afin de définir les propriétés des matériaux structurelles utilisé dans le pont. La maille d'élément discrète modèle l'arche et les contreforts (fixe) avec des blocs et le remplissage avec des particules. La charge numérique de collapsus est comparée avec la valeur de la charge obtenue *in situ* par Hendry et al. [26]. Cependant en [26] il y manque quelques paramètres décisifs. Cela à emmener (1) à la sélection de quelques valeurs référée dans la littérature spécialisée pour des structures semblables (2) aussi bien à des estimations contrôlées pour d'autres valeurs afin d'améliorer les résultats numériques quand ceux-ci sont comparés avec ce obtenus *in situ*.

L'arc du pont est parabolique avec une ouverture libre de 18.3 m, une largeur de 8.3 m, une montée de 2.85 m à mi-portée et est construis avec 62 voussoirs de grès, avec une hauteur $h = 0.711$ m. Pour la proportion portée/montée la parabole est assez plat, presque coïncident avec un arc circulaire, subséquemment elle est admis comme un arc segmentaire [26] [28]. La distance de l'extrados de la clef de l'arc à la surface de la chaussée est de 0.478 m, y compris la profondeur de remplissage (0.203 m), l'épaisseur de la sous-base (0.125 m) et le revêtement bitumeux (0.150 m).

Les voussoirs et les murs de tympan ont une densité $\gamma_b = 2100 \text{ kg / m}^3$, un module d'élasticité de $E_b = 15\,000 \text{ MPa}$ et une résistance à la compression de $f_b = 43,8 \text{ MPa}$. Le matériel de remplissage, composée par un mélange de gravier, sable et argile, a une densité de $\gamma_f = 1890 \text{ kg / m}^3$ et un module de déformation de $E_f = 40 \text{ MPa}$, [27].

Comme première approximation, les coefficients de rigidité élastique normale k_n et tangente k_s des contacts par unité de surface, lesquelles sont les rigidités équivalentes qui résultent de l'effet combiné des blocs et du joint, satisfassent,

$$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{k'_n} + \frac{l_{cm}}{E_b}; \quad \frac{1}{k_s} = \frac{1}{k'_s} + \frac{l_{cm}}{G_b} \quad (5.1)$$

où l_{cm} est la longueur définie par les centres de masse des deux blocs en contact (mesuré le long de la normale du contact), k'_n et k'_s sont les coefficients de rigidité normale et tangente effectif du joint par unité de surface et G_b est le module de rigidité des blocs [29].

La table 1 montre les valeurs considérées pour les paramètres des trois types de contact, c'est-à-dire, entre les blocs b-b, entre les particules p-p et les mixte b-p. Les valeurs adopté pour k'_{b-b} , k'_{b-p} et pour le coefficient de Poisson ν ont été déterminée expérimentalement par Costa [20] dans l'étude du Pont de Lagoncinha, Portugal.

Table 1 – Coefficients de rigidité des contacts.

	$l_{c.m.}$ m	ν —	E GPa	G GPa	k'_n GPa / m	k'_s GPa / m	k_n GPa / m	k_s GPa / m
b-b	0.3208	0.2	15.000	6.250	5.400	0.590	4.840	0.573
b-p	0.1500	0.2	15.000	6.250	65.000	27.000	4.840	0.573
p-p	0.1500	0.2	0.040	0.017	65.000	27.000	1.596	0.666

Pour les contacts b-p la formule (5.1) donne $k_n = 0.079$ GPa / m et $k_s = 0.033$ GPa / m, mais ces valeurs ont dû être augmentées ($k_{b-p} \equiv k_{b-b}$) pour éviter des superpositions excessive. Pour les contacts p-p les valeurs considéré pour k'_n et k'_s corresponde aux valeurs des contacts b-p.

Les valeurs utilisées pour les coefficients de rigidité k_n et k_s pour les contacts p-p doivent être tel que la rigidité du remplissage soit approximativement similaire à E_f . Pour les calculer les valeurs arbitraires $k'_{p-p} \equiv k'_{b-p}$ ont été admit et les valeurs de k_n et de k_s spécifié par (5.1) sont calculé et rapporté par $k_{n,(1)} = 0.266$ GPa / m et $k_{s,(1)} = 0.111$ GPa / m. Alors un échantillon d'un mètre carré à été isolé depuis la maille du remplissage, figure 4, remplaçant, si possibles, les particules partiellement coupées par des plus petits. Par la suite cet échantillon a été emprisonné avec trois blocs fixes, un placé au-dessous et les autres deux sur ses côtés, figure 5. Un quatrième bloc pesant 2.6 kN et libre de se déplacez verticalement à été soumis à des incréments de charge de 25 kN, figure 5, et son déplacement vertical a été mesuré, figure 6. Cette procédure a été exécutée pour les valeurs de k_n et de k_s donnée par une, deux, quatre, six et huit fois $k_{n,(1)}$ et $k_{s,(1)}$, avec tous les autres paramètres fixe. Les modules de déformation tangent moyen sont de 22, 28, 34, 42 et 48 MPa et les modules de déformation sécant sont respectivement de 16, 26, 12, 14 et 18 MPa (différence entre le derniers et le premier résultat). Les trois dernières valeurs (12, 14 et 18) sont considérablement plus hautes si les premiers quatre pas de la charge sont ignorés, 28, 43 et 54 MPa, voir la figure 6. Pour satisfaire la valeur spécifié par E_f les coefficient de rigidité adopté pour les contacts p-p doivent être environ $k_n = 6 k_{n,(1)} = 1.596$ GPa / m et $k_s = 6 k_{s,(1)} = 0.666$ GPa / m, voir la table 1.

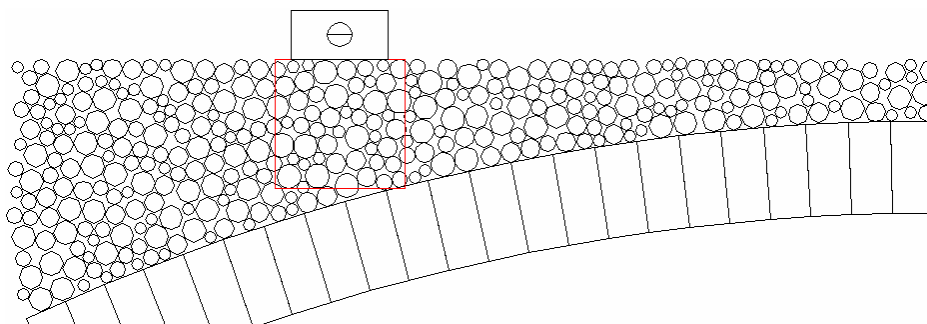


Figure 4 – Définition de l'échantillon de particules.

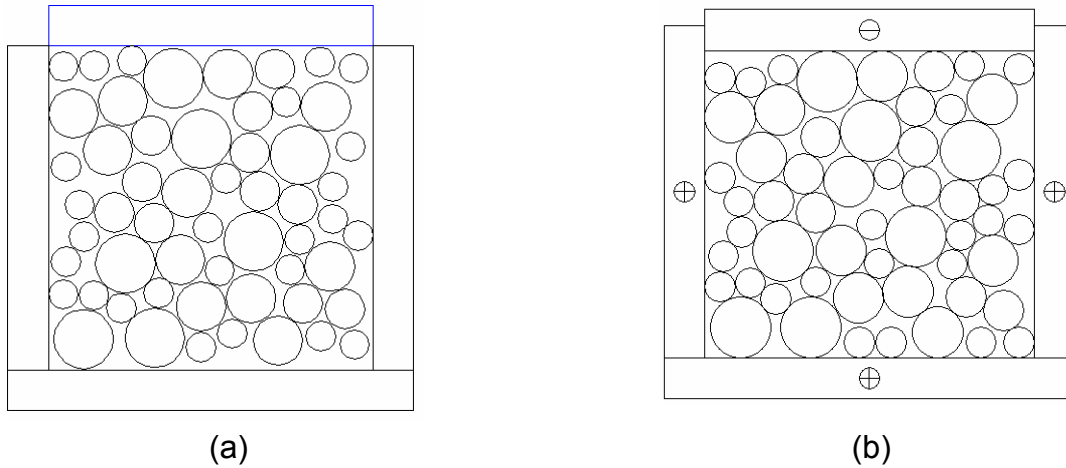


Figure 5 – (a) Emprisonnement de l'échantillon et (b) chargement.

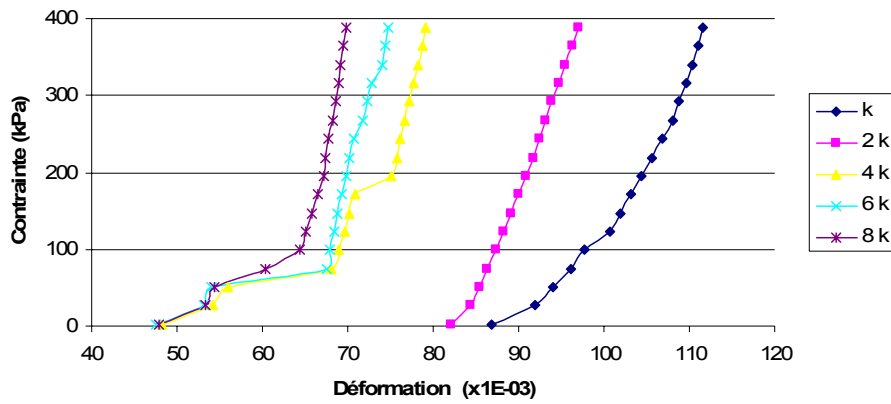


Figure 6 – Relation contrainte-déformation pour les particules confinées.

La table 2 donne les paramètres restant requis. Suivant [30] et [31] la résistance de traction $f_{b,t}$ du grès est ignorée. La résistance de traction du matériel de remplissage $f_{f,t}$ est aussi ignorée. Comme il n'y a aucun enregistrement sur l'angle de frottement ϕ , la valeur utilisée pour tous les types de contact est celle obtenue des essais réalisés en laboratoire des échantillon prit au Monastère de la Serra do Pilar, Portugal, [32]. Pour les contacts p-p et b-p la cohésion adoptée a été $c_f = 10$ kPa, justifié par les valeurs dans la gamme $[1.0, 20.0]$ kPa spécifiée par [33] e [34], et pour les contacts b-b $c_b = 0$. Pour une analyse par unité de largeur, la surface d'influence du contact est donnée par $a_c = l_c \times 1 = l_c$, où l_c est la longueur d'influence du contact. Si, pour les contacts b-b, l_c peut varier, une valeur minimum doit être définie et, suivant Coulomb [35], la valeur $l_{c,\min} = h_b / 10$ à été sélectionnée. Si l_c est fixe alors elle est donnée par (1) pour les contacts b-b, la demi-distance entre les deux points de contact appartenant au joint d'hauteur h contigu au deux blocs en contact, $l_{c,\text{fixed}} = (h_b - d_r) / 2 = 0.3455$ m, (2) pour les contacts b-p et p-p, la moyenne des diamètres des particules.

Table 2: Propriétés pour les éléments discrets et les joints.

	c kPa	ϕ °	$f_{b,t}, f_{f,t}$ MPa	$f_{b,1}$ MPa	$l_{c,\text{fixed}}$ m	$l_{c,\min}$ m
b-b	0	35.6	0	43.8	0.3455	0.0711
b-p	10	35.6	0	—	0.1500	—
p-p	10	35.6	0	—	0.1500	—

Dans l'analyse suivante la charge permanent de la structure est « appliquée » d'abord et la configuration stable correspondante est calculée, et seulement après les autres charges sont appliquées. Les appuis de l'arc sont fixes, et la longueur horizontal supérieure est de 2.0 m. Le modèle de l'arc contient un bloc pour chaque voussoir et contient 1984 particules pour faire le maillage de remplissage. Le point (couteau) de la charge est appliquée à un quart de l'ouverture libre de l'arc, au moyen d'un bloc supplémentaire qui pèse 17.72 kN / m (147 kN) empêché de se tourner ou de se déplacez horizontalement, en incréments de 200 kN.

Pour cet exemple l'amortissement numérique du type local non-visqueux a été utilisé et la longueur d'influence du contact a été maintenue fixe. La charge de collapsus est de 3147 kN, et la valeur maximum de la contrainte de compression est inférieure à f_b (2.90 MPa pour 2947 kN). La figure 7 compare la courbe de charge-déplacement du centre de masse d'un voussoir à un quart de l'ouverture libre de l'arc avec celle obtenu par Hendry [27]. La différence qualitative entre les deux courbes peut être résumée par la difficulté que la MEDM révèle dans l'accommodation de la réduction progressive du coefficient de rigidité de l'arc. C'est peut-être une conséquence de l'adoption d'éléments discrets rigides ou de l'utilisation d'une gamme élastique purement linéaire dans la loi constitutive. Le sujet est encore sous observation.

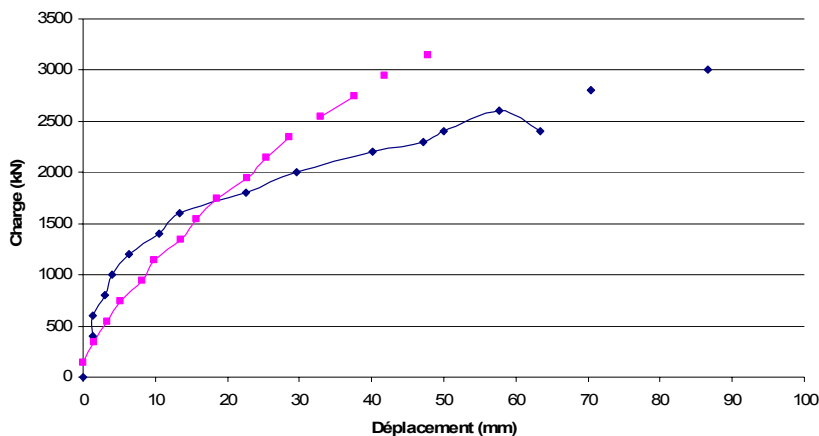


Figure 7 – Relation charge-déplacement.

De la figure 8 à la figure 11, il est illustré le mécanisme de collapsus, où la rupture du matériel de remplissage arrive premier dû à l'effet du bloc qui représente la charge et où le collapsus de l'arc apparaît avec l'application presque directe de ce bloc sur l'extrados.

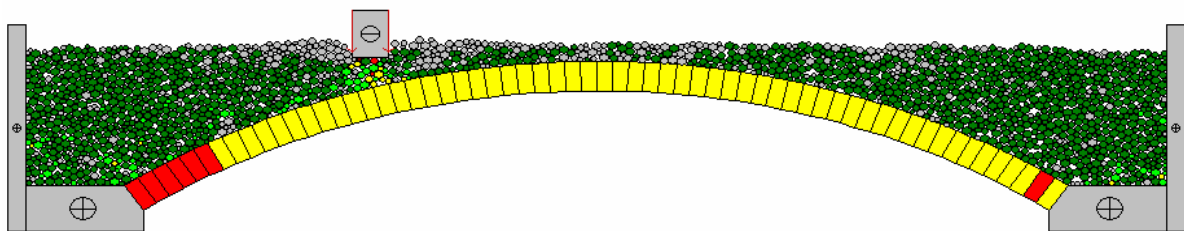


Figure 8 – Configuration du modèle d'éléments discrets mixte pour $F = 800$ kN .

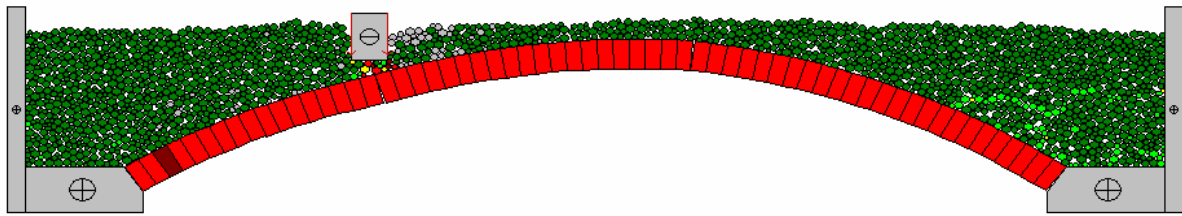


Figure 9 – Configuration de collapsus pendant.

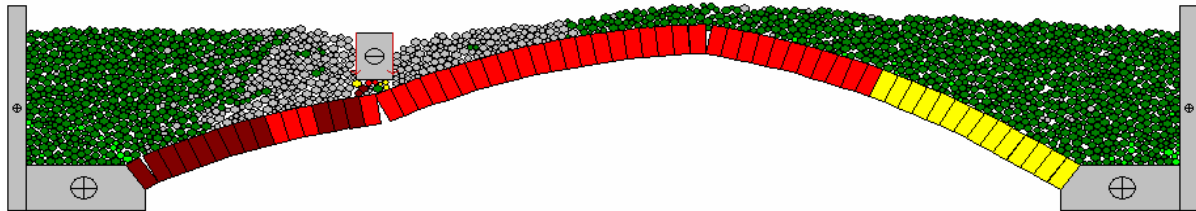


Figure 10 – Configuration de collapsus débutant.

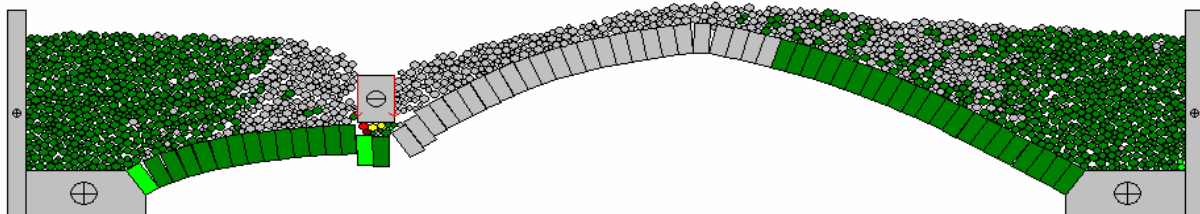


Figure 11 – Configuration de collapsus effective.

8 CONCLUSIONS

Cette communication présente la méthode des éléments discrets mixte et son application pour le calcul numérique de la charge de collapsus des ponts en arc en maçonnerie. L'interaction entre les éléments discrets rigides considérés inclut des nouveaux types de contacts bloc-particule. Les routines semi-automatiques de génération du maillage sont spécialisées pour les principaux types d'éléments discrets. L'exemple qui conclut la communication illustre la bonne performance de cette méthode qui est encore en développement.

RÉFÉRENCES

1. Rouxinol, G. A. F. Structural modelling and evaluation of masonry arch bridges. Thèse de doctorat en préparation. Université de Coimbra, Portugal
2. Compaq Visual Fortran® 6.6 (2002). Program pour développement de software. Compaq Information Technologies Group, L.P
3. Cundall, P. A. (1971). A Computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems. Proc. of the Symposium of the Society of Rock Mechanics. Vol 1, paper No II-8, Nancy, France
4. Cundall, P. A. et Strack, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. Géotechnique. Vol 29, No 1, pp 47-65
5. Cundall, P. A. (1971). The Measurement and analysis of accelerations in rock slopes. Thèse de doctorat, Imperial Collège, Université de Londres
6. Cundall, P. A. (1982). Adaptive Density-Scaling for Time-Explicit Calculations. Proc. 4th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics. Edmonton, Canada, pp. 23-26.
7. Cundall, P. A. (1987). Distinct Element Models of Rock and Soil Structure. Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics, ed. Brown, E. T. George Allen & Unwin, pp. 129-163.

8. Hughes, T. J. R. (1987). The finite element method. Prentice-Hall.
9. ITASCA Consulting Group (1999). UDEC – Universal Distinct Element Code, User's Manual. Version 3.1. Minneapolis USA.
10. ITASCA Consulting Group (2002). PFC2D – Particle Flow Code in 2 Dimensions. User's Guide. Version 3.0. Minneapolis, USA.
11. Lemos, J. V. (1999). Modelling and failure analysis in rock engineering. LNEC, Lisbon.
12. Rouxinol, G. A. F., Providência, P. et Lemos, J. V. (2006). The discrete element method with 2D rigid polygonal and circular elements. 5th Conf. on Structural Analysis of Historical Constructions. Eds. Lourenço, P. B. et al. Vol 2, pp 1023-1031, New Delhi, India
13. Sincraian, G. (1998). A discrete element program based on a rigid block formulation. LNEC, Lisbonne.
14. Cundall, P. A. (1988). Formulation of three-dimensional distinct element model – Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr 25(3), pp 107-116
15. Munjiza, A (2004), The combined finite-discrete element method. John Wiley & Sons.
16. Williams, J. R. (1988). Contact analysis of large numbers of interacting bodies using discrete modal methods for simulating material failure on the microscopic scale. Eng. Computations 5, pp 198-209
17. Bathe, K.J. (1982). Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall.
18. Morikawa, H., Sawamoto, Y. and Kobayashi, N. (1993). Local Fracture Analysis of a Reinforced Concrete Slab by the Discrete Element Method. Proc. 2nd Int. Conf. Discrete Element Methods, pp. 275-286. USAIESL Publications, Cambridge
19. Underwood, P. (1983). Dynamic relaxation. Computational Methods for Transient Analysis. In Computational Methods for Transient Analysis, eds. Belytschko, T. and Hughes, J. R. North-Holland, pp.1-65.
20. Costa, C. (2002). Analyse du comportement du Pont de Lagoncinha sous l'effet de la circulation automobile. Thèse de maîtrise, Université du Porto, Portugal (en Portugais)
21. Valença, J. (2006). Techniques photogrammetric dans les structures de génie civil. Thèse de maîtrise, Université de Coimbra, Portugal (en Portugais)
22. Komeyli-Birjandi, F. (1986). Sonic investigation of masonry structures, Thèse de doctorat, Université de Édimbourg
23. Potyondy, D. O. and Cundall, P. A. (2004). A bonded-particle model for rock. Rock Mech. Min. Sci., n 41, pp. 1329-1364
24. AutoCAD® 2007 3D (2006). Computer Aided Design. Autodesk, USA.
25. Rouxinol, G. A. F., Providência, P. et Lemos, J. V. (2007). Bridgemill bridge bearing capacity assessment by a discrete element method. Submitted to the 5th Int. Conf. Arch Bridges, Madeira, Portugal
26. Page, J. (1993). Masonry arch bridges. State-of-the-Art Review. Transport Research Laboratory, Department of Transport, London
27. Molins, C. (1998). Numerical simulation of the response of arch Bridges. In Proc. 2nd Int. Seminar Structural Analysis of Historical Constructions, Eds. P. Roca et al. CIMNE, Barcelona pp. 93-123
28. Vermeltfoort, A.T. (2001). Analysis and experiments of masonry arches. In Historical Construction, Eds. Lourenço, P. B. and Roca, P. University of Minho, Guimarães, Portugal, pp. 489-498
29. Vieira J. L. M. (1997). Un modèle de l'élément discret pour l'étude des structures en maçonnerie. Thèse de maîtrise, Institut Supérieur Technique, Lisbonne (en Portugais)
30. Heyman, J. M. A. (1982). The masonry arch. Ellis Horwood
31. Lemos, J. V. (2006). Modelling of Historical Masonry with Discrete Elements. In Computational Mechanics – Solids, Structures and Coupled Problems, Eds. Mota Soares, C. A. Et al. Springer, pp. 375-391
32. Muralha (2000). Essai sur échantillons du Monastère de la Serra do Pilar. Report Technique. LNEC, Lisbonne (en Portugais)
33. Cavicchi, A. and Gambarotta, L. (2005). Collapse analysis of masonry bridges taking into account arch-fill interaction. Engineering Structures 27, pp. 605-615.
34. Gago, S. G., Alfaiate, J. and Almeida J. R. (2003). Simulation numérique sur un essai d'un pont en maçonnerie. 7th Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional. Université d'Évora, Portugal (en Portugais)
35. Heyman, J.M.A. (1995). Teoría, historia y restauración de Estructuras de Fábrica. Instituto Juan de Herrera, Madrid